المحاضرة الثالثة

التوقع الرياضي والتباين

التوقع الرياضي
التباين والانحراف المعياري
العزوم
الدالة المتجددة للعزوم
نظرية شيبيشيف، نظرية الأعداد الكبيرة

مسألة: أرسلت مؤسسة عروضا إلى ٤ عملاء. احتمال تلقي طلبية من العميل الأول هي ٠.٢، من العميل الثاني ٠.٣، من العميل الثالث ٠.٣٥ و٠.٤ من العميل الرابع. في انتظار ردود العملاء ما هو العدد المتوقع من الطلبيات؟

في العديد من الحالات لا يكفي حساب احتمال تحقق حدث أو أحداث معينة بل نحتاج للخروج بتوقع معين يلخص الوضعية المطروحة أمامنا. من جهة أخرى قد يصعب المفاضلة بين خيارات متاحة مقيمة بمبالغ معينة بسبب ارتباط كل مبلغ بمخاطرة مختلفة؛ من المعروف أن الاستثمارات الأكثر مردودية هي تلك التي تتضمن أكبر مخاطرة، فكيف يمكن أخذ في الحسبان المخاطرة والمبلغ المتوقع وبطريقة دقيقة وموضوعية؛ إن طريقة التوقع وبقية المفاهيم الأخرى الواردة أعلاه يمكن أن تساعدنا في ذلك.

التوقع الرياضي Espérance mathématique

تعريف التوقع
توقع دالة

تعريف التوقع

يعرف التوقع الرياضي لمتغيرة عشوائية متقطعة كما يلي:

$$\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)}$$

و يعرف التوقع الرياضي لمتغيرة عشوائية مستمرة كما يلي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

نرمز للتوقع أحيانا ب μ أو μ_x.

مثال: نلقي قطعة نقدية ٤ مرات. أحسب العدد المتوقع من المرات التي نحصل فيها على وجه.

Xعدد مرات وجه	0	1	2	3	4	المجموع
P(X)	$(1/2)^4$	$4\ (1/2)^4$	$6\ (1/2)^4$	$4\ (1/2)^4$	$(1/2)^4$	16/16 = 1
XP(X)	0	$4\ (1/2)^4$	$12\ (1/2)^4$	$12\ (1/2)^4$	$4\ (1/2)^4$	32/16 = 2

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)=32/16=2$$

العدد المتوقع هو مرتين من بين ٤ رميات.

مثال ٢. نلقي قطعة نقدية مرة واحدة. يربح اللاعب ٢٠ دج إذا حصل على الرقم ٢، ويربح ٤٠ دج إذا حصل على الرقم ٤، و٦٠ دج إذا حصل على الرقم ٦، ويخسر ١٠ دج إذا حصل على الرقم ١، ٣٠ دج إذا حصل على الرقم ٣، و٥٠ دج إذا حصل على الرقم ٥. تحقق مما إذا كانت العبة متوازنة (هل توقع الربح يساوي توقع الخسارة).

الجواب هو أن اللعبة غير متوازنة لأن توقع الربح أكبر من توقع الخسارة $E(x) = 30/6 = 5 > 0$

نتيجة الرمي	1	2	3	4	5	6	المجموع
نتيجة المراهنةX	-10	20	-30	40	-50	60	-
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	6/6
X*P(X=x)	-10/6	20/6	-30/6	40/6	-50/6	60/6	(120-90)/6>0

مثال٣. أوجد التوقع الرياضي للمتغيرة ذات دالة الكثافة التالية:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0<x<2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x.0.dx+\int_{0}^{2} x(\frac{1}{2}x)dx+\int_{2}^{\infty} x.0.dx$$

$$E(x)=0+\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+0=\frac{4}{3}$$

توقع دالة

يستخدم توقع دالة عند حساب عدد من المقاييس مثل التباين، العزوم المركزية والعزوم المرتبطة بالأصل.

لتكن X م ع لها دالة كثافة f(x)، و$y = g(x)$ م ع تابعة لها.

$$E(Y)=E(g(x))=\sum_{x} g(x)f(x)$$

في حالة X م متصلة:

$$E(Y)=E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

مثال١. نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، و$Y=X^2$. أحسب E(X) وE(Y) .

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	1
X*P(X)	0	1/2	1/2	E(X) =1
X^2	0	1	4	

$X^2*P(X)$	0	1/2	1	$E(X^2) = 3/2$

مثال۲: لتكن X م ع ذات دالة الكثافة التالية، و$Y = g(x) = 3x^2 - 2x$. أحسب E(Y).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(Y) = E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(3x^2 - 2x)(0)dx + \int_{-\infty}^{+\infty}(3x^2 - 2x)(x/2)dx + \int_{-\infty}^{+\infty}(3x^2 - 2x)(0)dx$$

$$E(Y) = 0 + \int_0^2 (3x^2 - 2x)(x/2)dx + 0 = \frac{1}{2}\left[\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[12 - \frac{16}{3}\right] = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

خصائص التوقع الرياضي

E (C) = C
E(CX) = CE(X)
E(X+Y) = E(X) + E(Y)
E(XY) = E(X)E(Y) إذا كانت المتغيرتان مستقلتان.

مثال: تتوقع مؤسسة أن تتلقى كل شهر ٣ طلبيات من العميل A و٤ من B .

- أحسب العدد المتوقع من الطلبيات المتلقاة من A في السنة.
- أحسب العدد الإجمالي المتوقع من الطلبيات المتلقاة في شهر.

يعين كل عميل من طرفه مندوبا عن كل طلبية لمتابعة إتمامها. كم تتوقع أن يلزم من مقابلة لتعريف مندوبي العميل A بمندوبي B.

E(12A) = 12E(A) = 12(3) = 36
E(A*B) = E(A)*E(B) = 4*3 = 12.
E(A + B) = E(A) + E(B) = 3 + 4 = 7

التباين والانحراف المعياري Variance et écart type

تعريف التباين
خصائص التباين
المتغيرة المعيارية

تعريف التباين

يعرف التباين لمتغيرة عشوائية كما يلي:

$$\boxed{\sigma_X{}^2 = Var(X) = E\left[(X - \mu)^2\right]}$$

و الانحراف المعياري هو جذر التباين. $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}$.

في حالة المتغيرة العشوائية المتقطعة :